ある問題が必ず解を持つことは どのようにして示すのか

数学の問題には解が存在するものと存在しないものがあります．例えば以下の連立一次方程式を考えてみましょう．

(1) $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$

問 (1) はただ一組の解 $(x,y)=(2,-1)$ を持ちますが問 (2) の解はありません．

ある種の問題が解を持つことを示す最も簡単な方法は，その問題を解く手順（公式）を与えることです．例えば，二次方程式には解の公式があって，公式に従えば（複素数の範囲で）必ず解を得ることができます．それでは三次方程式なら？四次方程式なら？もっと一般に n 次方程式なら？と疑問はふくらんでいきますが，うまい解法が見つからない問題も沢山あります．そうした場合に「具体的に解を求めることはできないけれど，解は必ず存在する」ことを保証してやる必要がでてきます．そこでこの講義では「解法が分からない問題の解の存在をどの様にして示すのか」をテーマに，その一端をお話ししたいと思います．